TAKIACADEMY.COM
"JAMAIS PLUS SIMPLE"

Exercice n°3: On considère la fonction f définie par

$f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x - 2}{x - 1}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/a) Dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire le tableau de variation de la fonction $|f|$

2°/a) Déterminer les réels a,b et c tel que pour tout $x \neq 1$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ que l'on déterminera.

3°/ Tracer $\mathcal{C}_f$ dans le repère R.

4°/ Montrer que le point $\Omega(1,0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$

5°/ Soit la droite $D_k : y = kx - k$, $(k \in \mathbb{R})$

a) Montrer que l'équation $f(x) = kx - k$ est équivalente à $(k+1)(x-1)^2 = -1$ et $x \neq 1$

b) Discuter alors suivant les valeurs de k, le nombre des points d'intersections de la droite D_k avec la courbe $\mathcal{C}_f$.

Academy
TAKIACADEMY.COM
" JAMAIS PLUS SIMPLE "

Exercice 3

n°(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et

$$f'(x) = \frac{(-2x+2)(x-1) - 1(-x^2+2x-2)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{-2x^2+2x+2x-2+x^2-2x+2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{-x^2+2x}{(x-1)^2} = \frac{x(-x+2)}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{-\infty} -x = +\infty$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$	$-$	$\|$	0	$+$	

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} -x = -\infty$$

$$f(2) = \frac{-4+4-2}{2-1} = -2$$

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) : \lim_{x\to1^+} \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$$

$$: \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x)\geq 0 \\ -f(x) \text{ si } f(x)\leq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$\|f\|$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)|$$

Academy
TAKIACADEMY.COM
JAMAIS PLUS SIMPLE

2°/a) $ax+b+\dfrac{c}{x-1} = \dfrac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}$

$= \dfrac{ax^2+(b-a)x+c-b}{(x-1)}$

par identification $\begin{cases} a=-1 \\ b-a=2 \\ c-b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases}$

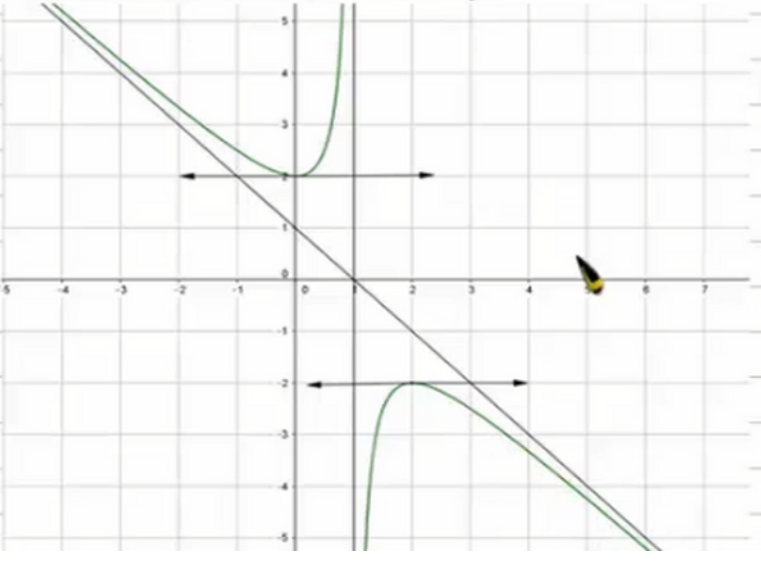
Ainsi $f(x) = -x+1 - \dfrac{1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (-x+1) = \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{-1}{x-1} = 0$

$\Delta : y = -x+1$ asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{1^-} f(x) = +\infty$ $\Delta' : x=1$ asymptote à $\mathcal{C}_f$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$



TAKIACADEMY.COM
"JAMAIS PLUS SIMPLE"

4/ $\Omega(1,0)$; $a'=1$, $b'=0$

$2a'-x = 2-x$

$2b' = 0$

* $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq -1 \Leftrightarrow 2-x \neq 1$

$\Leftrightarrow 2-x \in D_f$

* $f(2a-x)+f(x) = f(2-x)+f(x)$

$$= \frac{-(2-x)^2+2(2-x)-2}{(2-x)-1} + \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$$

$$= \frac{-4+4x-x^2+4-2x-2}{1-x} + \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$$

$$= \frac{-x^2+2x-2}{1-x} + \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$$

$$= \frac{x^2-2x+2}{x-1} + \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$$

$= 0 = 2b$

$\Omega(1,0)$ est un centre de symétrie de C_f.

5/ $f(x) = kx-k \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x-2}{x-1} = k(x-1)$

$\Leftrightarrow k(x-1)^2 = -x^2+2x-2$

$\Leftrightarrow k(x-1)^2 + x^2-2x+1+1 = 0$

$\Leftrightarrow (k+1)(x-1)^2 = -1$

6) $M(x,y) \in C_f \cap D_k$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = kx-k \\ y = f(x) \end{cases}$

D_0 : $y=0$

D_1 : $y=x-1$

D_2 : $y=2x-2$

d'où $f(x) = kx-k$

Octobre immeuble yesmine
refour souk ahad Sousse
E-mail: contact@takiaca
Web : www.takiacademy

Academy
TAKIACADEMY.COM
" JAMAIS PLUS SIMPLE "

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$k+1$	$-$	ϕ	$+$		

$f(x) = kx - k \iff (k+1)(x-1)^2 = -1 \quad (E)$

* si $k = -1$ on a $(E) \Leftrightarrow 0 = -1$ impossible

$$\mathcal{D}_{-1} \cap \mathcal{C} = \phi$$

* si $k > -1$; $(E) \Leftrightarrow (k+1)(x-1)^2 = -\frac{1}{+}$ impossible

$$\mathcal{D}_k \cap \mathcal{C} = \phi$$

* si $k < -1$; $(E) \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{-1}{k+1} > 0$

$\Leftrightarrow (x-1) = \sqrt{\frac{-1}{k+1}}$ ou $(x-1) = -\sqrt{\frac{-1}{k+1}}$

Ainsi $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_k = \{ A', A'' \}$

Conclusion si $k \geq -1$ $\quad \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_k = \phi$

si $k < -1$ $\quad \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_k = \{ A', A'' \}$

c) $I(2,3)$

$M' = S_I(M) \Leftrightarrow M * M' = I \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{x+x'}{2} \\ 3 = \frac{y+y'}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = 6 - y \end{cases}$

$M(x,y) \in \mathcal{C}_g \Leftrightarrow y = g(x)$

$\Leftrightarrow y = 6 - f(4-x)$

$\Leftrightarrow 6 - y = f(4-x)$

$\Leftrightarrow y' = f(x')$

$\Leftrightarrow M'(x',y') \in \mathcal{C}_f$

$\Leftrightarrow S_I(M) \in \mathcal{C}_f$

d'où $\mathcal{C}_g = S_I(\mathcal{C}_f)$

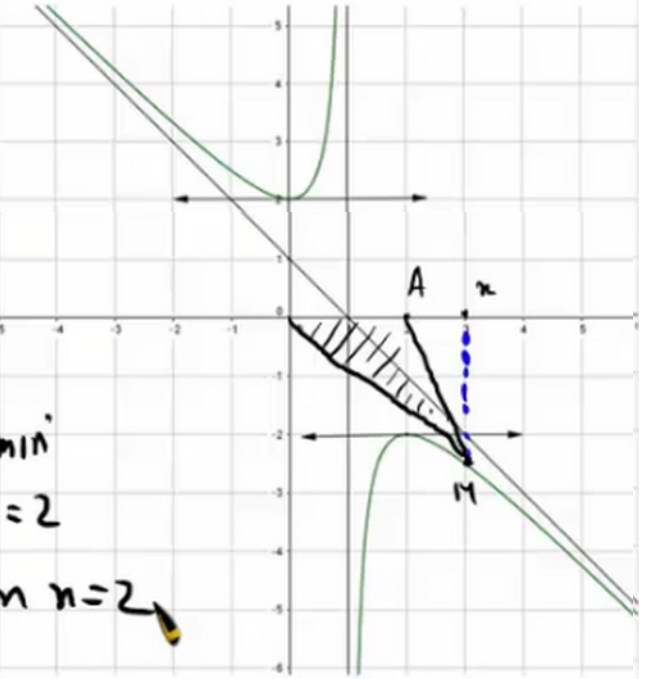
Octobre immeuble yesmine
refour souk ahad Sousse
E-mail : contact@takiac
Web : www.takiacadem

2°/

$$A(x) = \frac{OA \cdot |f(x)|}{2}$$

$$= \frac{2|f(x)|}{2}$$

$$= |f(x)|$$



A min $\Leftrightarrow$ $|f(x)|$ min

$\Leftrightarrow$ $|f(x)| = 2$

$\Leftrightarrow$ $x = 0$ ou $x = 2$